Namn: FACIT

Liten diagnos om komplexa tal del 2 – version 1

Alla uppgifter är tänkta att lösas utan miniräknare

1. Omvandla mellan grader och radianer.

a) $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$

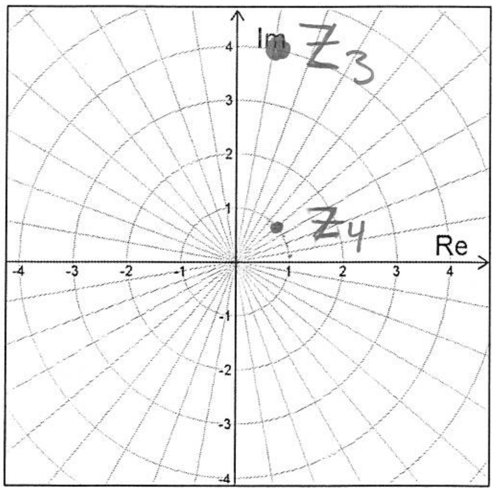
b) $12^\circ = 12 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{12\pi}{180} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{6}\pi}{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 5} = \frac{\pi}{15}$

2. Låt $z_1 = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ och $z_2 = \left(2, \frac{\pi}{9}\right)$ och bestäm på polär form talen

a) $z_3 = z_1 \cdot z_2$ $\quad \left(2, \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(2, \frac{\pi}{9}\right) = \left(4, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\right) = \left(4, \frac{4\pi}{9}\right)$

b) $z_4 = z_1/z_2$ $\quad \frac{\left(2, \frac{\pi}{3}\right)}{\left(2, \frac{\pi}{9}\right)} = \left(1, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9}\right) = \left(1, \frac{2\pi}{9}\right)$

c) Markera talen z_3 och z_4 i det komplexa talplanet till höger



3. Lös ekvationen $z^6 = i$.
Ange lösningarna i polär form.

Skriv om i på polär form:

$i = (1, 90^\circ)$

Avståndet $= \sqrt[6]{1} = 1$

Första vinkeln $= \frac{90^\circ}{6} = 15^\circ \Rightarrow$

$\alpha = \frac{360}{6} = 60^\circ$

$z_1 = (1, 15^\circ)$
$z_2 = (1, 75^\circ)$
$z_3 = (1, 135^\circ)$
$z_4 = (1, 195^\circ)$
$z_5 = (1, 255^\circ)$
$z_6 = (1, 315^\circ)$

4. Lös ekvationerna

a) $z^3 + 2z^2 + 65z = 0$

Bryt ut z $z(z^2+2z+65)=0$

$z=0$ $z=-1\pm\sqrt{1-65}$

$-1\pm\sqrt{-64}=$

$-1\pm 8i$

b) $4\bar{z} - 2z + 4 + i = 16 - 5i$

Anta att $z=(a+bi) \Rightarrow \bar{z}=(a-bi)$

$4(a-bi)-2(a+bi)=12-6i$

$4a-4bi-2a-2bi=12-6i$

$2a-6bi=12-6i$

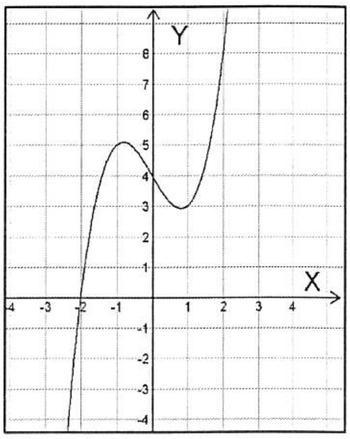
$a=6$ $b=1$

$\Rightarrow z=6+i$

5. Till höger visas grafen till polynomet

$p(x) = x^3 - 2x + 4$

$x=-2$ en lösning $\Rightarrow (x+2)$ en faktor



Lös ekvationen $x^3 - 2x + 4 = 0$

$$\begin{array}{l} \quad\ x^2 - 2x + 2 \\ \overline{x^3 + 0x^2 - 2x + 4} \quad \boxed{x+2} \\ -(x^3 + 2x^2) \\ \quad 0 \ - 2x^2 \\ \quad -(-2x^2 - 4x) \\ \qquad 0 \quad 2x \\ \qquad\ -(2x+4) \\ \qquad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Kvoten $=0$

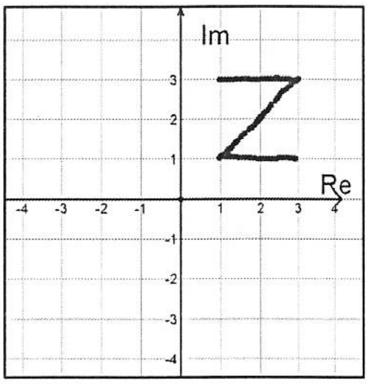
$x^2-2x+2=0$

$x=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm\sqrt{-1}=1\pm i$

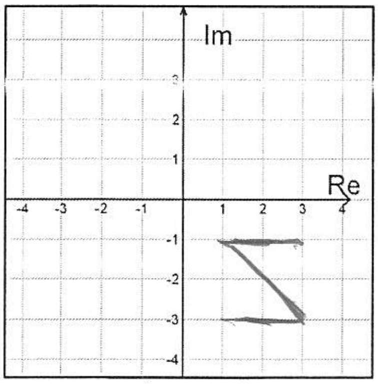
Lösningarna: $x_1=-2$ $x_2=1-i$ $x_3=1+i$

6. I figuren till höger visas ett komplext tal plan med ett antal punkter markerade som tillsammans formar en figur.

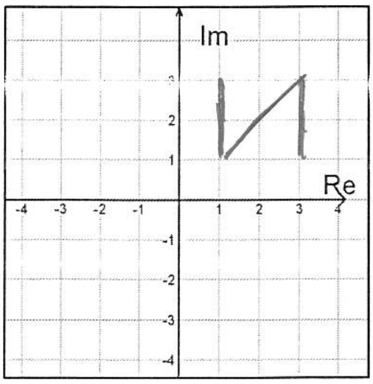
Rita i **a) och b)** de komplexa talplanen nedan **figurens utseende** efter att de i figuren ingående punkterna **genomgått beräkningen** som står nedanför talplanet.



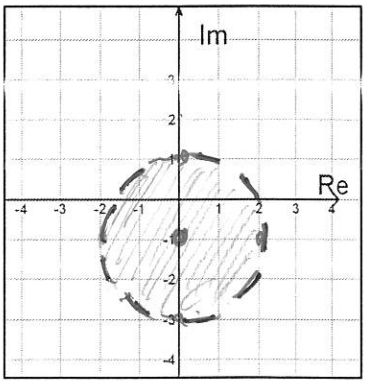
I c)-uppgiften, rita ALLA punkter som uppfyller villkoret. ***c) har alltså inget med figuren att göra!***



a) $\bar{z}$



b) $\bar{z} \cdot i$



c) Markera **ALLA** punkter som uppfyller: $|z + i| < 2$

OBS!! c)-uppgiften har alltså inget med figurens punkter att göra!

Cirkel med mitt vid $-i$ och radie <2

Namn: FACIT

Liten diagnos om komplexa tal del 2 – version 2

Alla uppgifter är tänkta att lösas utan miniräknare

1. Omvandla mellan grader och radianer.

a) $\frac{\pi}{9}$ $= \frac{\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 20^\circ$

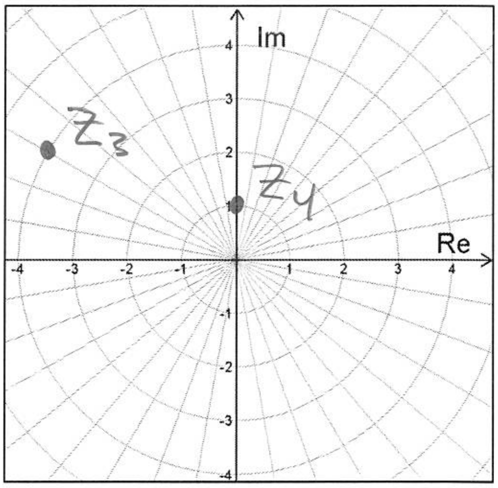
b) $40°$ $= 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{18} = \frac{2\pi}{9}$

2. Låt $z_1 = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ och $z_2 = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ och bestäm på polär form talen

a) $z_3 = z_1 \cdot z_2$ $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \left(2, \frac{\pi}{6}\right) = \left(4, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$

b) $z_4 = z_1 / z_2$ $\frac{\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)}{\left(2, \frac{\pi}{6}\right)} = \left(1, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \left(1, \frac{3\pi}{6}\right)$

c) Markera talen z_3 och z_4 i det komplexa talplanet till höger



3. Lös ekvationen $z^3 = -8i$.
Ange lösningarna i polär form.

Skriv om $-8i$ på polär form:

$-8i = (8, -90°)$

Avståndet $= \sqrt[3]{8} = 2$

Första vinkeln $= \frac{-90°}{3} = -30° \Rightarrow$

$\alpha = \frac{360°}{3} = 120°$

$z_1 = (2, -30°)$

$z_2 = (2, 90°)$

$z_3 = (2, 210°)$

4. Lös ekvationerna

a) $z^3 + 4z^2 + 29z = 0$

Bryt ut z $z(z^2+4z+29)=0$

$z=0$ $z=-2\pm\sqrt{4-29}=$

$=-2\pm\sqrt{-25}=$

$=-2\pm 5i$

b) $2z + 3\bar{z} + 2 + 3i = 12 - 6i$

Anta att $z=(a+bi) \Rightarrow \bar{z}=(a-bi)$

$2(a+bi)+3(a-bi)=10-9i$

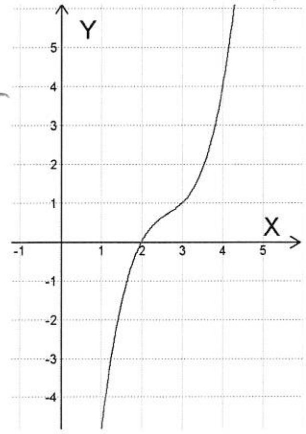
$2a+2bi+3a-3bi=10-9i$

$5a-bi=10-9i$

$a=2$ $b=9$

$\Rightarrow z=2+9i$

5. Till höger visas grafen till polynomet
$p(x) = x^3 - 8x^2 + 22x - 20$



$x=2$ en lösning $\Rightarrow (x-2)$ en faktor

Lös ekvationen $x^3 - 8x^2 + 22x - 20 = 0$

$$\begin{array}{l}
x^2-6x+10 \\
\hline
x^3-8x^2+22x-20 \;\; \underline{|x-2} \\
-(x^3-2x^2) \\
\hline
0 \;\; -6x^2 \\
\quad -(-6x^2+12x) \\
\hline
\quad 0 \;\; +10x \\
\qquad (10x-20) \\
\hline
\qquad 0 \;\; 0
\end{array}$$

Kvoten $=0$

$\Leftrightarrow$

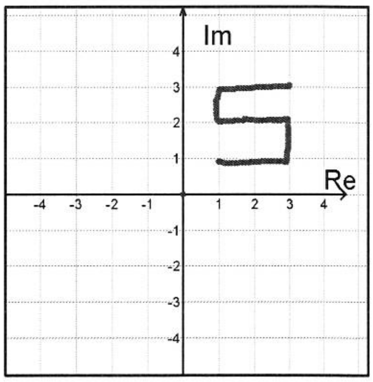
$x^2-6x+10=0$

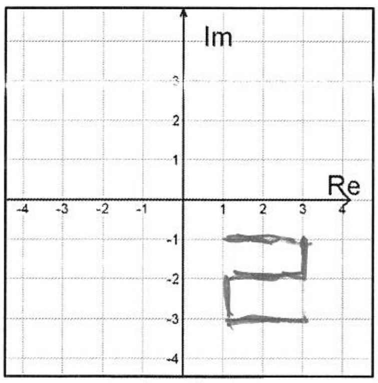
$x=3\pm\sqrt{9-10}=3\pm\sqrt{-1}=3\pm i$

Lösningarna: $x_1=2$ $x_2=3+i$ $x_3=3-i$

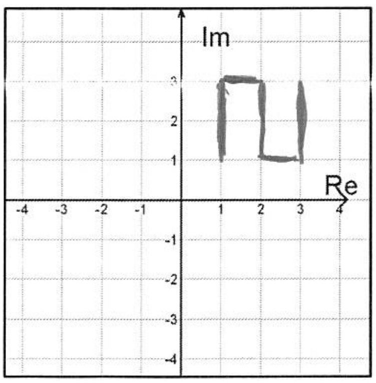
6. I figuren till höger visas ett komplext tal plan med ett antal punkter markerade som tillsammans formar en figur.
Rita i **a) och b)** de komplexa talplanen nedan **figurens utseende** efter att de i figuren ingående punkterna **genomgått beräkningen** som står nedanför talplanet.

I c)-uppgiften, rita ALLA punkter som uppfyller villkoret. ***c) har alltså inget med figuren att göra!***

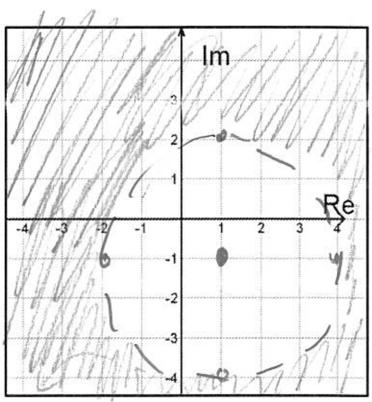




a) $\bar{z}$



b) $\bar{z} \cdot i$



c) Markera **ALLA** punkter som uppfyller:
$|z - 1 + i| > 3$

Cirkel med mitt i $(1-i)$ med radie >3

OBS!! c)-uppgiften har alltså inget med figurens punkter att göra!

Namn: FACIT

Liten diagnos om komplexa tal del 2 – version 3

Alla uppgifter är tänkta att lösas utan miniräknare

1. Omvandla mellan grader och radianer.

a) $\frac{\pi}{10}$ $= \frac{\pi}{10} \cdot \frac{180}{\pi} = 18^\circ$

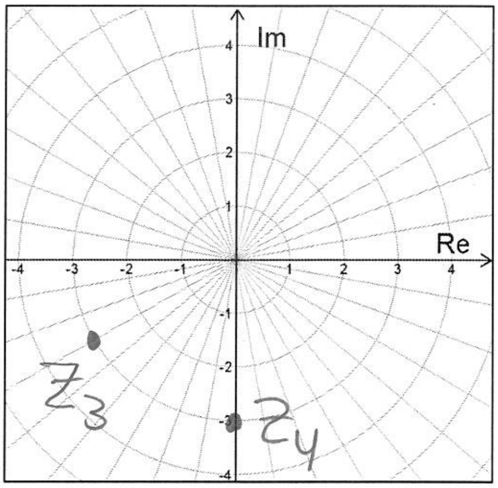
b) 6° $= 6 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30}$

2. Låt $z_1 = \left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ och $z_2 = \left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$ och bestäm på polär form talen

a) $z_3 = z_1 \cdot z_2$ $\left(3, \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(1, \frac{5\pi}{6}\right) = \left(3, \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = \left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$

b) $z_4 = z_1 / z_2$ $\frac{\left(3, \frac{\pi}{3}\right)}{\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)} = \left(3, \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) = \left(3, -\frac{3\pi}{6}\right)$

c) Markera talen z_3 och z_4 i det komplexa talplanet till höger



3. Lös ekvationen $z^4 = -16$.
Ange lösningarna i polär form.

Skriv om −16 på polär form:

$-16 = (16, 180^\circ)$

Avståndet $= \sqrt[4]{16} = 2$

Första vinkeln $= \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$ $\Longrightarrow$

$\alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

$z_1 = (2, 45^\circ)$

$z_2 = (2, 135^\circ)$

$z_3 = (2, 225^\circ)$

$z_4 = (2, 315^\circ)$

4. Lös ekvationerna

a) $z^3 - 14z^2 + 53z = 0$

Bryt ut z $\quad z(z^2 - 14z + 53) = 0$

$z = 0$ $\quad z = 7 \pm \sqrt{49 - 53}$

$z = 7 \pm \sqrt{-4}$

$z = 7 \pm 2i$

b) $5z - \bar{z} + 2 + 4i = 14 - 2i$

Anta att $z = (a + bi) \Rightarrow \bar{z} = (a - bi)$

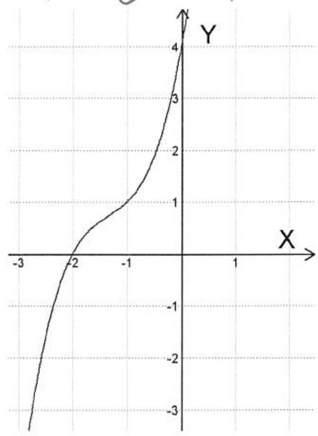
$5(a + bi) - (a - bi) + 2 + 4i = 14 - 2i$

$5a + 5bi - a + bi = 12 - 6i \Rightarrow 4a + 6bi = 12 - 6i$

$a = 3 \quad b = -1$

$\Rightarrow z = 3 - i$

5. Till höger visas grafen till polynomet
$p(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$



$x = -2 \Rightarrow (x + 2)$ är en faktor

Lös ekvationen $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$

$$
\begin{array}{l}
x^2 + 2x + 2 \\
\hline
x^3 + 4x^2 + 6x + 4 \quad \underline{|x + 2} \\
-(x^3 + 2x^2) \\
\hline
0 \quad 2x^2 \\
\quad -(2x^2 + 4x) \\
\hline
\quad 0 \quad + 2x \\
\quad\quad -(2x + 4) \\
\hline
\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Kvoten $= 0$

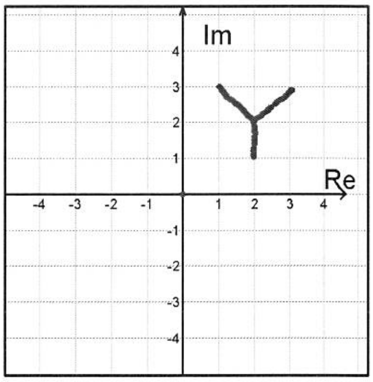
$x^2 + 2x + 2 = 0$

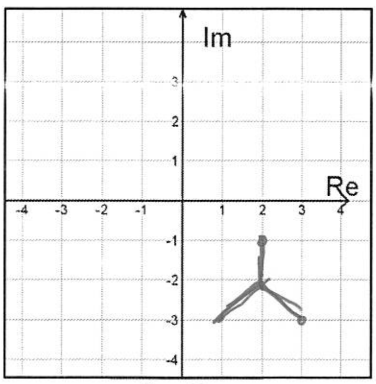
$x = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i$

Lösningarna: $x_1 = -2 \quad x_2 = -1 - i \quad x_3 = -1 + i$

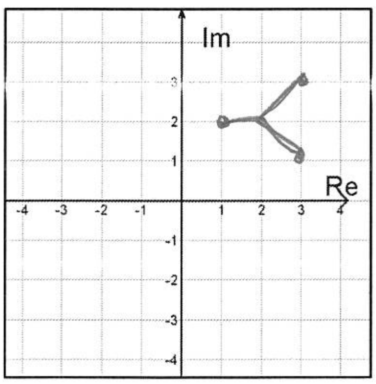
6. I figuren till höger visas ett komplext tal plan med ett antal punkter markerade som tillsammans formar en figur.
Rita i **a) och b)** de komplexa talplanen nedan **figurens utseende** efter att de i figuren ingående punkterna **genomgått beräkningen** som står nedanför talplanet.

I c)-uppgiften, rita ALLA punkter som uppfyller villkoret. ***c) har alltså inget med figuren att göra!***

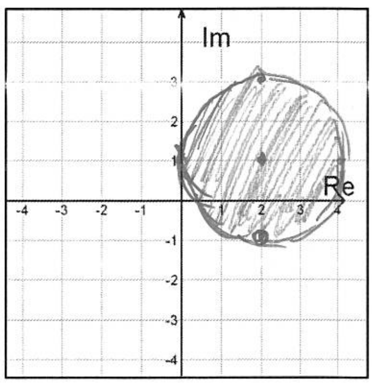




a) $\bar{z}$



b) $\bar{z} \cdot i$



c) Markera **ALLA** punkter som uppfyller: $|z - 2 - i| \leq 2$

Cirkel med Mitt i $(2 + i)$ med radie ≤ 2

OBS!! c)-uppgiften har alltså inget med figurens punkter att göra!